ΛΥΚΕΙΟ ΑΡΧ.ΜΑΚΑΡΙΟΥ Γ΄(ΔΑΣΟΥΠΟΛΗ) **ΣΧΟΛ. ΧΡΟΝΙΑ: 2018 – 2019**

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑ: ***Μαθηματικά*** *ΒΑΘΜΟΣ……*

ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ:Α.ΣΑΒΒΑ - Χ.ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΥ *ΥΠ.ΚΑΘΗΓΗΤΗ…….*

ΔΙΑΡΚΕΙΑ:90΄ *ΥΠ.ΚΗΔΕΜΟΝΑ……*

ΕΙΔΟΣ :Προειδοποιημένο

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:8/4/2019 ***Γ****ΚΑΤ* *ΠΕΡΙΟΔΟΣ:…….*

ΟΝΟΜΑ:…………………………………………………………………….ΤΜΗΜΑ:……ΑΡ……

1. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int (x^3 + 4e^{-2x} + \sqrt{x} + 4)dx$ β) $\int x^2(1 + x^3)^4 \cdot dx$

γ) $\int \frac{5x+1}{x^2+4}dx$ δ) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}} \cdot dx, \quad x = 4\eta\mu\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

[B.20]

2. Αν $\int_5^8 f(x) \cdot dx = 1$ και $\int_2^5 f(x) \cdot dx = 8$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α)$\int_5^2 f(x) \cdot dx$ β)$\int_1^3 f(3x-1) \cdot dx$

[B.2-5]

3. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^t - 1)dt}{x^2}$

[B.5]

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία Α, Β στα οποία τέμνει τον άξονα των $x'x$.

β) Αν Γ το σημείο τομής των εφαπτομένων, να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της f χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\frac{1}{2}$.

[B.4-6]

5. Αν $I_\nu = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi^\nu x \cdot dx, \nu \in N$, να δείξετε ότι $I_\nu = \frac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2},\ \nu \geq 2$ στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\varphi^5 x \cdot dx$.

[B.8]

6. Τ είναι το χωρίο που περικλείεται από την $\psi = x$ την $f(x) = e^x$ τον άξονα των $\psi'\psi$ και την $\psi = e$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Τ.

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου Τ γύρω από τον άξονα των $\psi'\psi$.

γ) Να υπολογίσετε τον όγκο που παράγει το πιο πάνω χωρίο όταν περιστραφεί κατά 2π γύρω από την ευθεία $\psi = e$.

[Β.15]

7. Έστω $f: (0, +\infty) \to R$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $x^2 \cdot f'(x) = 9x^2 - 2x \cdot f(x),\ \forall\, x > 0$ και $f(1) = \frac{7}{2}$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f.

β) Αν $f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$ να δείξετε ότι η $\psi = 3x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f την πλάγια ασύμπτωτη και τις ευθείες $x = 1$ *και* $x = \lambda$ *με* $\lambda > 1$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

[Β.5-5-2]

8. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to (0, +\infty)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ και η γραφική παράσταση της διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$. Αν ισχύει $\int_0^2 (xf''(x) + 3f'(x))dx = 6$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $f(2) = 4$.

β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = f(x)$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^2 \frac{2f'(x)}{f^2(x) + 2f(x)} dx$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{3}{2}$.

[Β.5-5-2]

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot lnx - x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο Α(1,-2) και ότι: $x^x \geq e^{x-1}, \quad \forall x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι: $\int_1^2 x^x \cdot dx > e - 1$

[Β.5-3]

10. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1,4] \to R$ με $\int_1^4 f(x) \cdot dx = 0$ και F μία παράγουσα της. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (1,4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$

[Β.3]